Basisvaardigheden algebra

ter bevordering van de algebraïsche vaardigheden

J. S. DOMINGUEZ

MAART 2003

Inhoudsopgave

Inleiding

Voor je heb je een syllabus liggen die hopelijk je algebraïsche vaardigheden gaat verbeteren en verder ontwikkelen.
Er wordt onder andere ingegaan op de algebraïsche vaardigheden die je hebt geleerd in voorgaande jaren. Tevens worden deze vaardigheden verder ontwikkeld met behulp van oefeningen en nieuwe theorie.
Deze syllabus bestaat uit vijf hoofdstukken, met aan het eind van elk hoofdstuk een aantal oefenopgaven die bestaan uit twee gedeelten:

1. A. Basiskennis, en

2. B. toepassing.

De sommen die in het gedeelte A staan kunnen misschien wat saai overkomen. Maar het is erg belangrijk dat je ze allemaal maakt en de fouten die je maakt ook weer bekijkt en snapt wat je fout hebt gedaan. Daar leer je namelijk het meeste van. Het mag duidelijk zijn dat hoe meer je met dit soort opgaven oefent, hoe getrainder je raakt in het herkennen van de verschillende oplossingsmethoden die er zijn. Ook zul je dan sneller de sommen op kunnen lossen, waardoor je op een toets meer tijd overhoudt voor de rest van de (vaak inzichtelijke) vragen.
Dit hele ontwerp is speciaal voor jullie geschreven, het is de bedoeling dat jij er goed mee kan werken en er veel van leert. Als je deze algebraïsche basiskennis goed onder de knie hebt, zul je er volgend jaar veel baat bij hebben. Aangezien dit de eerste versie is, stel ik het erg op prijs als je commentaar en opmerkingen (zowel positieve als negatieve) zou kunnen en willen geven. Dit kan dan leiden tot een verbeterde tweede versie waar andere leerlingen weer dankbaar gebruik van kunnen maken. De op- en aanmerkingen kun je emailen naar het adres: j.s.dominguez@maartens.nl.

Hoofdstuk 1

Zo kort mogelijk schrijven

In dit hoofdstuk zullen we nogmaals herhalen wat we in de wiskunde wel en wat we niet bij elkaar op kunnen tellen. Het is heel belangrijk in de wiskunde om vergelijkingen zo kort mogelijk te schrijven. Dit maakt vaak (zo niet altijd) de berekeningen een stuk eenvoudiger. Ook verkleinen we hiermee de kans op fouten. Maar we moeten dan uiteraard wel weten hoe we een vergelijking korter kunnen schrijven. Hierbij is het ten eerste heel belangrijk dat je precies weet wat een variabele en een constante is.

1.1 Variabelen en constanten

Elke algebraïsche functie bestaat uit variabelen en constanten.
Een **variabele** is een letter waarvan je steeds de waarde kunt veranderen. In de vergelijking $y = 2x$ zijn x en y de variabelen.
De waarde van een variabele kunnen we dus veranderen. Als we bijvoorbeeld voor de variabele x in $y = 2x$, 12 kiezen, dan krijgen we als uitkomst $y = 2 \cdot 12 = 24$.
De waarde van een **constante** daarentegen kun je niet veranderen. De uitkomst van een formule is meestal een constante. Een constante is over het algemeen een getal.
In de vergelijking $y = 2x + 8$ zijn x en y variabelen en het getal 8 een constante.
De 2 die voor de x staat noemen we een **factor** en $2x$ en 8 noemen we **termen**.

LEP OP: π, $\sqrt{2}$, 3^{12}, enz zijn ook constanten.

1.2 Korter schrijven

1.2.1 Termen bij elkaar optellen

We weten al heel lang dat we getallen bij elkaar op kunnen tellen: $4+8=12$. Op een soortgelijke manier kunnen we ook met variabelen rekenen: $4x+8x=12x$. We noemen $4x$ en $8x$ gelijksoortige termen, en we kunnen alleen gelijksoortige termen bij elkaar optellen. 4 en $8x$ zijn geen gelijksoortige en daarom kunnen we ze niet bij elkaar optellen.
Als we een stapje verder gaan en kijken naar de variabele x in het kwadraat, x^2, zien we dat bijvoorbeeld $3x^2$ en $5x^2$ ook gelijksoortige termen zijn. We kunnen ze dus bij elkaar optellen en we krijgen dan: $3x^2+5x^2=8x^2$.
Op een soortgelijke manier kunnen we verder gaan en naar $x^3, x^4, x^5, ...$ gaan kijken.
Net zo min als 4 en $8x$ gelijksoortige termen waren zijn $4x$ en $8x^2$ dat ook niet. We kunnen ze dus niet bij elkaar optellen. Ook kunnen we $4+x^3$, $2x+x^3$, $3x^2+6x^3$, enz niet bij elkaar optellen.
Ik zal mij in deze paragraaf beperken tot het optellen van termen. Ga zelf na dat dezelfde regels uiteraard ook gelden voor het aftrekken van termen.

1.2.2 Termen met elkaar vermenigvuldigen

In deze paragraaf zullen we gaan behandelen hoe we termen met elkaar kunnen vermenigvuldigen. Hoe we constanten met elkaar vermenigvuldigen zullen we uiteraard niet behandelen.
Een constante term met de variabele x vermenigvuldigen is, zoals je weet, erg eenvoudig. Bekijk het volgende voorbeeld: $4\times x=4x$.
We weten allemaal dat $3^2=3\times 3$ is. Om dezelfde reden is de variabele x in het kwadraat, $x\times x$. Zo kunnen we verschillende termen met elkaar vermenigvuldigen:

$$x\times x^2=x\times(x\times x)=x\times x\times x=x^3$$
$$2x^2\times 3x^2=2\times x\times x\times 3\times x\times x=2\times 3\times x\times x\times x\times x=6x^4$$

We kunnen de volgorde waarin we vermenigvuldigen zelf bepalen. Net zoals het niet uitmaakt of je 2×3 of 3×2 doet.
LET OP: met x bedoelen we eigenlijk $1x$ en met $-x$ bedoelen we $-1x$.
In de wiskunde gebruiken we vaak het vermenigvuldiginspunt '$\cdot$' in plaats van het zogenaamde 'keer'-teken $\times$.
Hieronder staan ter verduidelijking nog een aantal voorbeelden die we niet meer

van commentaar behoeven te voorzien.

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot x = 2x & 4 \cdot 3x^6 = 12x^6 \\ 2x \cdot x = 2x^2 & 3x^3 \cdot 5x^6 = 15x^9 \\ 3 \cdot 2x^2 = 6x^2 & 2x^3 \cdot 2x^3 = 4x^6 \\ 3x \cdot 2x^2 & \frac{1}{2}x^2 \cdot 2x = x^3 \end{array}$$

1.3 Haakjes

Haakjes komen erg vaak voor in formules. Daarom is het van belang dat je er goed mee kunt werken. Je moet snel en foutloos haakjes uit een formule weg kunnen werken en het omgekeerde, iets met haakjes schrijven, moet je ook foutloos kunnen.

1.3.1 Haakjes wegwerken

Enkele haakjes

Het wegwerken van haakjes kan op verschillende manieren. Wij zullen hier de zogenaamde ’kraaienpoot’ en ’papegaaienbek’ gaan gebruiken. De ’kraaienpoot’ gebruiken we bij enkele haakjes en de ’papegaaienbek’ bij dubbele haakjes. Voor de rest werken ze hetzelfde. Deze methodes worden zo genoemd, omdat de boogjes die je bij de formule tekent op een ’kraaienpoot’ en een ’papegaaienbek’ lijken. We beginnen met een voorbeeld:

Voorbeeld 1 *We willen de haakjes wegwerken van de formule* $y = 3(4x + 6)$ *(bedenk dat er tussen de* 3 *en* $(4x + 6)$ *eigenlijk keer staat!). Daartoe tekenen we twee boogjes op de volgende manier (de zgn. ’kraaienpoot’):*

$$y = 3(4x + 6)$$

Elk boogje betekent ’vermenigvuldig het ene uiteinde met de andere’. Dit geeft ons:

$$y = 3(4x + 6) = 3 \cdot 4x + 3 \cdot 6 = 12x + 18$$

□

Hierin kunnen uiteraard ook negatieve getallen voorkomen. Bedenk je dat bij een negatief getal het minteken bij het getal hoort! Bekijk de volgende twee voorbeelden:

Voorbeeld 2

$$y = -3(4x+6) = -3 \cdot 4x + -3 \cdot 6 = -12x - 18$$

Het minteken hoort bij de 3 en daarom moet je ook $-3 \cdot 4x$ doen en niet $3 \cdot 4x$!

Hetzelfde geldt voor:

$$y = -3(-4x-6) = -3 \cdot -4x + -3 \cdot -6 = 12x + 18$$

□

Net zoals dat je x schrijft in plaats van $1x$ en $-x$ in plaats van $-1x$ schrijven we $y = -(x+4)$ in plaats van $y = -1(x+4)$. Zonder haakjes wordt dit: $y = -x-4$. In plaats van te vermenigvuldigen met een constante, kun je op dezelfde manier vermenigvuldigen met een variabele. Bekijk de volgende voorbeelden:

Voorbeeld 3

$$y = x(2x-3) = x \cdot 2x + x \cdot -3 = 2x^2 - 3x$$

$$y = x^2(x+6) = x^2 \cdot x + x^2 \cdot 6 = x^3 + 6x^2$$

$$y = x^2(-x^3+6x) = x^2 \cdot -x^3 + x^2 \cdot 6x = -x^5 + 6x^3$$

□

En dit zouden we net zo ver uit kunnen breiden als dat we zouden willen.
Als laatste gaan we nog even kijken naar wat ingewikkelde formules als $y = -3x + 2x(x-1)$. Hierbij moet je je bedenken dat haakjes voorrang hebben. Dus je schrijft de formule eerst zonder haakjes en daarna neem je de gelijksoortige termen samen:

$$y = -3x + 2x(x-1) = -3x + 2x \cdot x + 2x \cdot -1 = -3x + 2x^2 - 2x = 2x^2 - 5x$$

Bedenk dat de term $-3x$ *niets* met de haakjes te maken hebben en dat dus de boogjes van de 'kraaienpoot' daar ook niet bij horen!
Uiteraard mag je het antwoord $2x^2 - 5x$ ook schrijven als $-5x + 2x^2$, maar het is gebruikelijk om de hoogste machten vooraan te zetten.

Dubbele haakjes

Bij het wegwerken van dubbele haakjes wil ik niet al teveel tijd bij stil staan. Het werkt in principe hetzelfde als met enkele haakjes. Bekijk het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 4 *We willen de haakjes wegwerken van de formule* $y = (x+6)(x-1)$ *(bedenk dat er tussen de* $(x+6)$ *en* $(x-1)$ *eigenlijk keer staat!). Daartoe tekenen we vier boogjes op de volgende manier (de zgn. 'papegaaienbek'):*

$$y = (x + 6)(x - 1)$$

Elk boogje betekent weer 'vermenigvuldig het ene uiteinde met de andere'. Dit geeft ons:

$$y = (x + 6)(x - 1) = x \cdot x + -1 \cdot x + 6 \cdot x + 6 \cdot -1 = x^2 + 5x - 6$$

□

Als je de haakjes weg hebt gewerkt is het van belang dat je ook alle gelijksoortige termen bij elkaar optelt.

1.3.2 Ontbinden in factoren

In de vorige paragraaf heb je gezien hoe je haakjes kunt wegwerken. Voor het oplossen van vergelijkingen heb je vaak nodig dat je de formule eerst met haakjes schrijft. Dit heet ook wel 'ontbinden in factoren'. We zullen ons hier beperken tot het ontbinden met enkele haakjes. Hoe je de zogenaamde 'drietermen' ontbindt (met dubbele haakjes) krijg je te zien in paragraaf 3.3.1.
Voor het ontbinden van zogenaamde 'tweetermen' bestaat een algoritme:

1. Zoek de grootste factor waar je beide termen door kunt delen. Zet deze voor de haakjes.
2. Zoek *wat* vermenigvuldigd met deze factor de oorspronkelijke termen oplevert.
3. Zet deze tussen de haakjes.
4. Controleer door middel van haakjes wegwerken of het klopt.

Bekijk hierbij ook ter verduidelijking het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 5 *Ontbind* $y = 8x^2 - 12x$.
De grootste factor is hier $4x$. *Deze zet je dus voor de haakjes:*

$$y = 8x^2 - 12x = 4x(... + ...)$$

$$2x \cdot 4x = 8x^2 \text{ en } -3 \cdot 4x = -12x$$

We hebben nu dus: $y = 8x^2 - 12x = 4x(2x - 3)$.
Dit controleren we nog even door middel van haakjes wegwerken:

$$y = 4x(2x - 3) = 8x^2 - 12x \text{ het klopt!}$$

□

1.4 Opgaven

A. Basiskennis

1. Schrijf de volgende formules (indien mogelijk) zo kort mogelijk.

a. $2 + x$	e. $2a - 3a$	i. $-5b + 3b - 3 + 6b$
b. $2 + x + 3x$	f. $12 + 3a + x$	j. $412b - 3b + 9$
c. $3x + 2x - x$	g. $8 + 3a - a + 2$	k. $7p - 3b + 6b$
d. $2x - 3p - x$	h. $a + a + a - 2a$	l. $2b + b - 3$

2. Schrijf de volgende formules (indien mogelijk) zo kort mogelijk.

a. $x^2 + x^2$	e. $a^2 + a^3$	i. $-b - \frac{7}{3}p^2 + 6\frac{1}{2}b$
b. $x^3 + x^2 + x^3$	f. $a + a^2 - 3a$	j. $9b^3 + 5b^5 - b^5$
c. $x + x^2 + 1$	g. $8\frac{1}{2}a^2 - 7a - 0,5a^2$	k. $b^7 + 3b^3 + 5b^7$
d. $2x + 3x + x^2$	h. $\frac{3}{7}a - \frac{5}{9}a + 3$	l. $2b^2 + 3b + 7b^2 - 8b^1$

3. Werk de haakjes weg en schrijf zo kort mogelijk.

a. $y = 6(x - 4)$	e. $p = -(a + 1)$	i. $q = -6(-b - 12)$
b. $y = 13(3 - x)$	f. $p = q(2a - 1)$	j. $q = b(-b + 2)$
c. $y = x(x + 8)$	g. $p = q(3a^2 - 1)$	k. $q = b(-2 - b)$
d. $y = -x(2 + x)$	h. $p = -8(-7 - a)$	l. $q = \frac{1}{2}(7b - 2)$

4. Werk de haakjes weg en schrijf zo kort mogelijk.

a. $y = 13 + x(2x - 1)$	e. $p = -a(-a + 1)$	i. $q = 6 - (3b + 2)$
b. $y = x + x(x - 1)$	f. $p = q + 3a(a^2 + 2)$	j. $q = 3b + (2b - 3)$
c. $y = x^2(x^2 + x - 1)$	g. $p = -6(3a - 1)$	k. $q = b(b^2 + 6b) + 2b^2$
d. $y = 3x(2x - 8x - 2)$	h. $p = -(3a + 2)$	l. $q = 7b - px(3b - 1)$

5. Werk de haakjes weg en schrijf zo kort mogelijk.

a. $y = (x+5)(x+1)$	e. $p = (2a-3)(a+6)$	i. $q = (b-2)(b-6)$
b. $y = (x+\frac{1}{2})(x+1)$	f. $p = (4a-2)(4a+2)$	j. $q = (b-7)(3b-1)$
c. $y = (x+2)(x-8)$	g. $p = (2a+8)(x-1)$	k. $q = (\frac{1}{2}b+\frac{1}{5})(-b+17\frac{1}{2})$
d. $y = (x+\frac{1}{2})(x-3)$	h. $p = (2a-7)(7-6a)$	l. $q = (1,2b-1)(1,2b+1)$

6. Ontbind in factoren.

a. $y = 3x^2 - 6x$	e. $p = 5a - 35a^2$	i. $q = -6b^2 + 12b$
b. $y = 3x^2 + 2\frac{1}{2}x$	f. $p = 10a - 25$	j. $q = -b^2 + b$
c. $y = 7x - 35x^2$	g. $p = 8a^2 - 4a$	k. $q = 18b - 6b^2$
d. $y = 12x + 18$	h. $p = 1,2a^2 + 3,6a$	l. $q = 26b^2 - 52b$

B. Toepassing

1. Boer Piet heeft een stuk land van 60 meter bij 90 meter. Aangezien er koeien op dat stuk land grazen, wil hij in plaats van een hek om zijn stuk land te plaatsen, een sloot eromheen graven. Dit bevordert ook nog eens de waterhuishouding van zijn land.
   De sloot moet overal x meter breed worden. Hij graaft de sloot alleen aan drie zijden. Aan de overgebleven zijde van 90 meter plaatst hij wel een hek (voor een doorgang).

   (a) Geef een zo kort mogelijke formule voor de omtrek van zijn land met sloot (Tip: maak een tekening!).

   (b) Wat is de omtrek als hij besluit de sloot 3 meter breed te maken?

   (c) Geef een zo kort mogelijke formule (eerst met haakjes, dan zonder) voor de oppervlakte van zijn land met sloot.

   (d) Wat is de oppervlakte als de sloot 3 meter breed is?

Hoofdstuk 2

Lineaire vergelijkingen

Elke lineaire vergelijking is van de vorm $y = ax + b$ met a het hellingsgetal en b het startgetal. De grafiek die bij een lineaire functie hoort is een rechte lijn met als $a < 0$ een dalende rechte lijn, als $a > 0$ een stijgende rechte lijn en als $a = 0$ een horizontale lijn.
We kunnen een vergelijking ook noteren als een functie. We schrijven dan in plaats van $y = 3x + 2$, $f(x) = 3x + 2$. Om verschillende functies uit elkaar te houden gebruiken we verschillende letters, zoals f, g, h, ... Deze notatie noemen we ook wel het functievoorschrift.
Als we naar de functie $f(x) = 3x + 2$ kijken en we willen weten welke waarde er bij $x = 4$ hoort, noteren we dat als $f(4)$. Nu kunnen we eenvoudig $f(4)$ uitrekenen, door voor x, 4 in te vullen: $f(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$. Dus bij $x = 4$ hoort de waarde 14.
Ga voor jezelf na dat in bovenstaand voorbeeld bij x-coördinaat 4 de y-coördinaat 14 hoort. Dus dat de grafiek door het punt $(4, 14)$ gaat. Je kunt zo dus bij elke x-coördinaat de bijbehorende y-coördinaat vinden.

2.1 Hoe herken je een lineaire formule

Het is erg belangrijk dat je uit je gegevens snel en eenvoudig kunt halen of het gaat over een lineaire formule. Er zijn veel verschillende manieren om dit te zien. We gaan hier drie manieren behandelen.

2.1.1 Aan de hand van het functievoorschrift

We hadden al eerder opgemerkt dat elke lineaire vergelijking van de vorm $f(x) = ax + b$ is, met a het hellingsgetal en b het startgetal.
Voor ik verder ga wil ik eerst ingaan op wat we precies verstaan onder het hel-

lingsgetal en het startgetal van een functie.
Het hellingsgetal, zoals de naam al zegt, geeft aan hoe groot de helling is. Dus hoe steil de grafiek is. Voor elk stapje naar rechts, hoeveel ga ik er omhoog (of omlaag)? Als ik bijvoorbeeld 1 stapje naar rechts ga en 3 omhoog, dan is mijn hellingsgetal 3. Als ik omlaag ga in plaats van omhoog, dan wordt mijn hellingsgetal negatief. We zien dus dat hoe groter het hellingsgetal (of hoe kleiner als het een negatief hellingsgetal betreft), hoe steiler de grafiek.
Het startgetal geeft aan waar in de y-richting een functie begint. We beginnen altijd bij $x = 0$. Dus als de grafiek de y-as in het punt $(0, 4)$ snijdt, is het startgetal 4.
Ga voor jezelf na, zonder verder te lezen, dat je aan de hand van deze informatie heel snel een schets kunt maken van de grafiek van een lineaire formule.
Aan de hand van het functievoorschrift kunnen we dus heel snel concluderen of het een lineaire formule is. Let op dat bijvoorbeeld de functie $f(x) = 3x + b^2$ ook een lineaire formule is, ook al lijkt hij er in eerste instantie niet op. Het functievoorschrift vertelt je dat x de variabele is, dus dat b een constante moet zijn. Dat betekent dus dat b^2 een *normaal* getal is en dus dat $f(x) = 3x + b^2$ ook een lineaire formule is. Om dezelfde reden zijn onderstaande functies ook lineair:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \pi x + 3 & j(x) = \frac{a}{2}x + 1 \\ g(x) = 2x + sqrt5 & k(x) = \pi \\ h(x) = 3^4 x + 2 & l(x) = 2x + ab \end{array}$$

Let op dat functies als $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$ en $f(x) = 2x + x^{\pi}$ **niet** lineair zijn.

2.1.2 Aan de hand van de tabel

Als er een tabel gegeven is of je hebt zelf een tabel gemaakt dan kun je eenvoudig bepalen of het om een tabel gaat die bij een lineaire functie hoort.
Je weet dat bij elk stapje dat je naar rechts gaat, je bij een lineaire functie steeds dezelfde aantal stapjes omhoog (of omlaag) gaat. In een tabel staan de waarden van de x-as op de bovenste rij en de waarden van de y-as (de uitkomsten) op de onderste rij. Dus als de waarden op de onderste rij steeds met dezelfde waarde toenemen kun je zeggen dat je met een lineaire functie te maken hebt. Uiteraard moet je hierbij altijd letten dat je in de bovenste rij te maken hebt met opeenvolgende gehele getallen (ga voor jezelf na waarom?).
Bij onderstaande tabel kun je zien dat je met een lineaire functie te maken hebt, de getallen in de onderste rij nemen steeds met 3 toe:

x	0	1	2	3	4	5
y	-2	1	4	7	10	13

Hieruit volgt dat het hellingsgetal 3 moet zijn. Het startgetal is zoals je weet de waarde waar je begint. Met andere woorden de waarde die hoort bij $x = 0$. In dit geval is het startgetal dus -2. En dus is de formule die bij deze grafiek hoort $y = 3x - 2$.

2.1.3 Aan de hand van de grafiek

Als de grafiek van een functie gegeven is, of als je deze zelf getekend hebt kun je aan de hand hiervan ook zien of het gaat om een lineaire functie. Als de grafiek een rechte lijn is (kaarsrecht!), dan heb je te maken met een lineaire formule.
Ga voor jezelf na dat met de kennis uit 2.1.1 en 2.1.2 dit logisch is.
Hieronder is de grafiek van de lineaire functie $y = 2x - 10$ getekend. Zoals je ziet is dit inderdaad een kaarsrechte lijn.

2.2 De grafiek en de functie

Als het functievoorschrift gegeven is kun je eenvoudig de grafiek tekenen. En andersom: als de grafiek gegeven is, kun je (als de punten goed af te lezen zijn) het functievoorschrift opstellen.

2.2.1 De grafiek tekenen

Aangezien de grafiek van een lineaire formule een rechte lijn is, weet je dat alle punten van de grafiek op die lijn liggen. Dus als je een stuk van de lijn getekend hebt, kun je de rest van de punten vinden door deze lijn door te trekken. Dit maakt het tekenen van een lineaire grafiek eenvoudig: je maakt een tabel waar je twee waarden in zet en uiterekend. Deze twee punten zet je in een assenstelsel en je verbindt ze met elkaar.
Voor de zekerheid kun je nog een derde punt uitrekenen om zo na te gaan of deze ook op de lijn ligt, zo niet dan heb je ergens een fout gemaakt.

Voorbeeld 6 *We willen de grafiek van $y = 3x - 1$ tekenen. Daarvoor gaan we eerst een tabel maken:*

x	0	1
y	-1	2

Deze punten zetten we in een assenstelsel en verbinden ze met elkaar.
Zie hieronder de grafiek.

□

Hou bij het tekenen van een grafiek altijd rekening met de contekst van de som. Als het gaat over bijvoorbeeld de huurprijs van een auto bij de gereden kilometers, ga je je horizontale as niet nemen van 0 naar 5 kilometer. Een auto huur je over het algemeen niet om er maar 5 kilometers mee te gaan rijden. De negatieve assen zijn in dit voorbeeld ook overbodig (ga na waarom!).

2.2.2 Het functievoorschrift vinden

Het vinden van het functievoorschrift bij een gegeven grafiek bestaat uit vier stappen. Het volgende algoritme geeft dit weer.

1. Schrijf de formule bij de grafiek in de vorm van $y = ax + b$.
2. Lees het startgetal op de verticale as af (b).
3. Bereken het helingsgetal (a).
4. Vul het stargetal (b) en het hellingsgetal (a) in de formule van stap 1. in.

Let bij punt 3 op dat het berekenen van het hellingsgetal soms eenvoudiger is als je in plaats van 1 stapje naar rechts gaat meerdere stapjes naar rechts gaat. Dan pas lees je af hoeveel je er omhoog (of omlaag) bent gegaan en dat aantal deel je weer door het aantal stapjes dat je naar rechts bent gegaan (ga na waarom dat delen nog nodig is!).

Voorbeeld 7 *We gaan van de grafiek hieronder proberen een functievoorschrift bij te vinden.*

1. $y = ax + b$
2. *Het snijpunt met de y-as is* $(0, 1)$*, dus het startgetal is* $b = 1$.
3. *Het hellingsgetal is* 2 *(één stapje naar rechts is twee omhoog).*
4. *Dus het functievoorschrift dat bij deze grafiek hoort is* $f(x) = 2x + 1$.

□

2.3 Het oplossen van lineaire vergelijkingen

Het oplossen van lineaire vergelijkingen is zoals je weet vrij eenvoudig. Er bestaat een algoritme dat altijd werkt. Deze is gebasseerd op de zogenaamde 'weegschaalmethode': om een weegschaal in evenwicht te houden, moet je links en rechts steeds hetzelfde doen.

1. Werk eerst de eventuele haakjes weg.
2. Zorg ervoor dat links de variabele (evt. met een factor) komt te staan en rechts de getallen. Dit doe je door aan beide kanten steeds hetzelfde op of af te trekken.
3. Deel uiteindelijk beide kanten door de eventuele factor die voor de variabele staat.

Even een voorbeeldje om dit algoritme te illustreren.

Voorbeeld 8 *Los op:* $2x + 3 = 5x - 6$.
We willen dus links alleen de variabele hebben staan. Daartoe moeten we dus die 3*, die in het links staat, wegwerken. Dit kunnen we doen door van* $2x + 3$*,* 3 *af te trekken. Als we aan de linkerkant* 3 *aftrekken dan moeten we dat ook aan de rechterkant doen:*

$$\begin{aligned} 2x + 3 - \mathbf{3} &= 5x - 6 - \mathbf{3} \\ 2x &= 5x - 9 \end{aligned}$$

Zo hebben we nog een $5x$ *aan de rechterkant die we graag weg willen hebben. Daarvoor trekken we zowel aan de linkerkant als aan de rechterkant* $5x$ *af:*

$$2x - \mathbf{5x} = 5x - 9 - \mathbf{5x}$$
$$-3x = -9$$

Als laatste delen we beide kanten nog door factor -3 *en houden we over:*

$$x = \frac{-9}{-3} = 3$$

□

Dit antwoord kun je altijd controleren door het weer in de oorspronkelijke formules $2x + 3 = 5x - 6$ in te vullen en na te gaan of het klopt (ga dit na!).

2.4 Opgaven

<u>A. Basiskennis</u>

1. Geef van de volgende formules aan welke lineair zijn.

a. $f(x) = 2x + 1$	e. $g(a) = \pi a$	i. $h(b) = \sqrt{3}$
b. $f(x) = 3$	f. $g(a) = b - a$	j. $h(b) = \sqrt{3} \cdot b$
c. $f(x) = 3 - x^2$	g. $g(a) = a(2a - 1)$	k. $h(b) = \sqrt{b} + 1$
d. $f(x) = x + \sqrt{x}$	h. $g(a) = 2^a$	l. $h(b) = 3^2 b - 1$

2. Geef van de volgende tabellen aan of ze bij een lineaire functie horen.

a.

x	0	1	2	3	4
y	8	5	2	-1	-4

c.

x	-2	-1	2	3	5
y	-1	0	3	4	6

b.

x	3	4	5	6	7
y	12	13	15	17	19

d.

x	2	4	6	8	11
y	-8	-12	-16	-20	-24

3. Teken de grafieken van de volgende functies in één assenstelsel.

   a. $f(x) = 3x - 2$
   b. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
   c. $fx = 6$

4. Vind het functievoorschrift van de volgende grafieken.

5. Los de volgende vergelijkingen op.

a. $2 + x = x - 1$
b. $2 + 3x = 5x - 4$
c. $10 - x = 12 + 5x$
d. $-6x + 7 = -11x - 5$
e. $-2a + 3 = -5a$
f. $15a - 74 = 13a + 4$
g. $34a + 20 = -57a - 71$
h. $\frac{1}{2}a + 9 = 6a - 1$
i. $3b - 13 = 5$
j. $7b - 14 = 3b - 26$
k. $100 - 2,5b = 78$
l. $3b + 2 = 38 - b$

6. Los de volgende vergelijkingen op.

a. $17 + x = 3(x + 1)$
b. $25 + 12(x + 1) = 0$
c. $3(-6x + 4) = -5x + 2(x - 9)$
d. $5(3x - 8) = 9x + 13$
e. $8b - 2 = 2(4b - 12)$
f. $\frac{1}{3}b = \frac{2}{3}b$
g. $3(a + 8) + 10 = 12$
h. $2(a + 1) + 8 = 3 - (a + 1)$
i. $-(a - 8) - 9 = 70$
j. $\frac{1}{2}a + 8(a + 9) = 0$
k. $8 + \frac{4}{7}b = 9$
l. $3b + 9(b + 1) = 9$

B. Toepassing

1. Silvia gaat elke week zwemmen in Kardinge. Een kaartje kost 4 euro. Haar broer wijst Silvia erop dat ze beter een kortingskaart kan kopen. Deze kortingskaart kost voor 1 jaar 45 euro en dan hoeft Silvia per keer maar $2,50$ euro te betalen voor het kaartje.

   (a) Hoeveel moet Silvia betalen zonder kortingskaart als ze in 1 jaar 40 keer gaat zwemmen?
   (b) En met kortingskaart?
   (c) Stel een formule op voor de prijs P bij het aantal keren zwemmen a zonder kortinskaart.
   (d) Stel ook een formule op voor het geval met kortingskaart.
   (e) Bereken met behulp van deze formules vanaf hoeveel keren zwemmen Silvia goedkoper uit is met een kortingskaart.
   (f) Teken beide grafieken in hetzelfde assenstelsel.
   (g) Leg in woorden uit wat het snijpunt betekent.
   (h) Kan Silvia beter wel of geen kortingskaart kopen. Laat met een berekening zien waarom wel of waarom niet.

2. Een student met veel verstand van computers besluit een bedrijfje te gaan beginnen in het repareren van computers. De mensen kunnen kiezen of de computer bij hem thuis te komen brengen of dat hij zelf langskomt bij de

klanten. Als hij zelf langs moet komen rekent hij 15 euro voorrijkosten. Verder is zijn tarief exclusief materiaal 8 per twintig minuten.

(a) Stel een formule op voor de kosten K en gewerkte uren t voor het geval dat de student bij de mensen langkomt.

(b) Doe hetzelfde voor het geval dat de klant bij de student langskomt.

(c) Geef aan welke overeenkomsten en verschillen de grafieken hebben (zonder de grafieken te tekenen).

(d) De student gaat bij mevrouw Van Reemst langs en is 40 minuten bezig. Hij heeft tevens een nieuwe grafische kaart geplaatst die 89 euro kost. Hoeveel moet mevrouw van Reemst betalen?

3. Robin krijgt zijn vriendinnetje op bezoek en besluit lekker voor haar te gaan koken. Hij wil er een romantisch etentje van maken en zet twee kaarsen van elk 30 centimeter lang op tafel, een rode en een groene. De rode kaars heeft een brandduur van 6 uur en de groene kaars een brandduur van 5 uur. Bij het branden wordt de kaars elk uur hetzelfde stukje korter.

   (a) Maak voor beide kaarsen een tabel en ga voor beide na hoeveel de *toename* per uur is.

   (b) Teken in hetzelfde assenstelsel de grafieken die bij deze kaarsen horen (neem voor de horizontale as de tijd in uren).

   (c) Waarom zijn deze grafieken lineaire grafieken?

   (d) Geef de formules die bij de kaarsen horen.

   (e) HOeveel centimeter lang is de groene kaars na $8\frac{1}{2}$ uur?

   (f) Na hoeveel *minuten* (na het aansteken van de kaars) is de rode kaars 17 centimeter lang.

4. De 3-VWO-klassen willen een schoolfeest voor klas 1, 2 en 3 organiseren waar ze idol Jamaï willen laten optreden. Ze krijgen toestemming van de school, mits ze de kosten en de financiering zelf regelen.
   Aangezien Jamaï zelf ook een scholier is, vraagt hij voor die avond een gereduceerd tarief van 2000 euro.
   Kim vindt dat het kaartje voor het schoolfeest maximaal 10 euro mag kosten.

   (a) Stel een formule op voor de kosten K bij het aantal leerlingen a.

   (b) Hoeveel kaartjes moeten er verkocht worden als er geen winst gemaakt wordt?

(c) Bas is de klassen rondgegaan met de vraag wie er wel en wie er niet zal komen. Er zullen 512 leerlingen komen. Welke vergelijking moeten we oplossen als we de prijs van het kaartje willen weten zonder winst te willen maken.

(d) Los deze vergelijking op.

5. (a) Teken in één assenstelsel de grafieken van de functies $f(x) = x + 3$ en $g(x) = 2 - 3x$.

   (b) Bereken $f(\frac{1}{4})$ en $g(\frac{1}{4})$.

   (c) Geef een interpretatie van het antwoord bij (b).

   (d) Teken in hetzelfde assenstelsel ook nog de lijn $y = 8$.

   (e) Los op $f(x) = 8$.

   (f) Noem het snijpunt van f met de lijn $y = 8$ A, en het snijpunt van g met deze lijn B. Bereken de lengte van AB.

Hoofdstuk 3

Kwadratische vergelijkingen

Elke kwadratische vergelijking is van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ en b en c willekeurige getallen. Ga zelf even na waarom er $a \neq 0$ moet gelden.
Een kwadratische vergelijking wordt ook wel eens een tweedegraads vergelijking genoemd.

3.1 Hoe herken je een kwadratische formule

Net zoals je gezien hebt bij lineaire vergelijkingen kunnen we ook aan de hand van het functievoorschrift, de tabel en de grafiek een kwadratische formule herkennen.

3.1.1 Aan de hand van het functievoorschrift

Het functievoorschrift van een kwadratische vergelijking is altijd van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$, met $a \neq 0$ en b en c willekeurige getallen.
Een aantal voorbeelden van kwadratische formules zijn:

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & j(x) = 2x^2 + 3x + 4 \\ g(x) = x^2 + 1 & k(x) = \frac{1}{2}x^2 + \pi x + \sqrt{2} \\ h(x) = 3x^2 + 2x & l(x) = 2x^2 + b\sqrt{2} \end{array}$$

Let hierbij weer op dat x de variabele is.

3.1.2 Aan de hand van de tabel

Een eigenschap van een kwadratische formule is dat toenamen gelijkmatig veranderen, met andere woorden: de verandering van de verandering is constant . Als er een tabel gegeven is of je hebt er zelf één gemaakt, dan kun je dus vrij eenvoudig bepalen of je te maken hebt met een kwadratische formule. Let hierbij weer op dat de getallen bovenin de tabel *opeenvolgend* zijn (ga voor jezelf na waarom). Bekijk het voorbeeld hieronder om dit te verduidelijken.

x	0	1	2	3	4	5
y	6	3	2	3	6	11

Je ziet dat de verandering van de verandering gelijk aan 3 is. Hieruit kunnen we dus concluderen dat deze tabel bij een kwadratische formule hoort.

3.1.3 Aan de hand van de grafiek

Het herkennen van een kwadratische formule aan de hand van de grafiek is lastig. Er zijn in de wiskunde heel veel functies waarvan de grafiek lijkt op die van een kwadratische formule, maar dat niet zijn. Daarom kunnen we aan de hand van de grafiek vaak niet met 100% zekerheid zeggen dat het de grafiek van een kwadratische formule is.

De grafiek van een kwadratische formule heeft de vorm van een parabool (dan wel een berg- of een dalparabool). Een parabool heeft en top en is symmetrisch ten opzichte van deze top. Als $a < 0$ dan hebben we te maken met een bergparabool en als $a > 0$ dan is de grafiek een dalparabool.

Hieronder is de grafiek van de kwadratische functie $y = 2x^2 + x - 3$ getekend ($a = 2 > 0$, dus een dalparabool).

3.2 De grafiek en de functie

Als het functievoorschrift van een kwadratische formule gegeven is, kun je vrij eenvoudig de grafiek hiervan tekenen. Andersom, het functievoorschrift opstellen als de grafiek gegeven is, is iets gecompliceerder.

3.2.1 De grafiek tekenen

Om de grafiek van een kwadratische functie te kunnen tekenen moet je eerst een tabel maken. Als je deze tabel gemaakt hebt, dan zet je deze punten in een assenstelsel en verbindt deze met een *vloeiende* lijn. Dit klinkt vrij eenvoudig, maar welke getallen kies je voor de tabel?
Hiervoor maak je gebruik van de kennis dat de grafiek van een kwadratische formule (een parabool) een top heeft en symmetrisch is ten opzichte van deze top. Dus als we de top uit kunnen rekenen, kunnen we een tabel maken met de x-coördinaat van de top (we zullen dit de x-top noemen) in het midden van de tabel. De getallen die erna en ervoor komen hangen uiteraard af van het functievoorschrift, zoals we later zullen zien.

Hoe vinden we de top van een parabool?
De top van een parabool vinden kan op verschillende manieren. Ik zal hier een manier behandelen dat altijd werkt en vrij eenvoudig te begrijpen en te onthouden is.

Stelling 1 (De top van een parabool) *De x-coördinaat van de top van de kwadratische vergelijking* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *is* $x = \frac{-b}{2a}$*. Dit houdt in dat de top de coördinaten* $(\frac{-b}{2a}, f(x = \frac{-b}{2a}))$ *heeft.*

BEWIJS:
We kunnen de symmetrie-as van een parabool vinden door het midden op te zoeken. Dit kunnen we doen door de parabool met een horizontale lijn te snijden en deze snijpunten uit te rekenen. Als je het gemiddelde neemt van deze twee snijpunten dan heb je het midden (en dus ook de symmetrie-as). Dus ook de x-top. Het eenvoudigst is om de parabool te snijden met de lijn $y = c$. Je krijgt dan:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= c \\ ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax + b) &= 0 \\ x = 0 \text{ en } x &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

En het gemiddelde van deze twee snijpunten is dan $x = \frac{0+\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$. □

Nu we dus de top kunnen berekenen, kunnen we een geschikte tabel maken en aan de hand hiervan de grafiek tekenen. De tabel die je dan maakt zal er als volgt uit komen te zien.

x	x_1	x_2	x_3	x-top	x_4	x_5	x_6
y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	y-top	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$

Met x_1 t/m x_6 geschikt gekozen getallen.
Met het voorbeeld hieronder zullen we dit proberen te verduidelijken:

Voorbeeld 9 *Om de grafiek van* $f(x) = x^2 + 2x - 6$ *te tekenen gaan we eerst een tabel maken. Hiervoor hebben we de top nodig. Deze is* $x_{top} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$*;* $y_{top} = f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 6 = -6$.
Aan de hand hiervan maken we de volgende tabel:

x	-5	-3	-2	$-\mathbf{1}$	0	1	3
y	9	-3	-6	$-\mathbf{7}$	-6	-3	9

Als we dit uitzetten in een assenstelsel en deze punten met een vloeiende lijn verbinden dan krijgen we onderstaande grafiek:

□

3.2.2 Het functievoorschrift vinden

Het vinden van het functievoorschrift aan de hand van de grafiek is redelijk gecompliceerd. Als de parabool snijpunten heeft met de x-as, dan kun je het functievoorschrift in ontbonden vorm schrijven. Er blijft altijd een onbekende factor r over.
Stel de grafiek snijdt de x-as in $x = p$ en $x = q$ dan kun je het functievoorschrift in de ontbonden vorm $f(x) = r(x - p)(x - q)$ schrijven. Ga voor jezelf na dat voor elke r deze formule dezelfde nulpunten heeft.
In het functievoorschrift $f(x) = r(x - p)(x - q)$ zijn p en q bekend (het zijn namelijk de snijpunten met de x-as die je kunt aflezen), maar r is onbekend. Hoe vinden we r?
Deze factor r kun je uitrekenen als je nog een punt op de grafiek weet. Je weet namelijk dat als je de x-coördinaat in de formule invult, je de y-coördinaat als uitkomst terugkrijgt. Als je dit dus doet ($f(x)$ is de uitkomst), dan houd je een lineaire vergelijking over met onbekende r die je vrij eenvoudig op kunt lossen. Zie hiervoor het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 10 *Er is een grafiek gegeven van een kwadratische functie f die twee snijpunten met de x-as heeft: $x = -2$ en $x = 6$. De grafiek gaat tevens door het punt $(0, -3)$.*
Met deze informatie kunnen we het functievoorschrift opstellen:

$$f(x) = r(x - -2)(x - 6) = r(x + 2)(x - 6)$$

. Nu moeten we de onbekende factor r nog zien te vinden. Dat kunnen we doen met de kennis dat de grafiek door het punt $(0, -3)$ gaat. Met andere woorden als je $x = 0$ invult krijg je als antwoord $f(0) = -3$.
We vinden dan:

$$-3 = r(0 + 2)(0 - 6) \Rightarrow -3 = -12r \Rightarrow r = \frac{1}{4}.$$

En dus $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)(x - 6)$ wat na het wegwerken van de haakjes gelijk is aan $f(x) = \frac{1}{4} - x - 3$. □ □

Voor de gevallen dat de parabool geen snijpunten met de x-as heeft zullen we achterwege laten.

3.3 Het oplossen van kwadratische vergelijkingen

Er zijn grofweg drie methodes voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen: 1) ontbinden in factoren, 2) kwadraten afsplitsen en 3) de ABC-formule. Hiervan

zijn methode 1) en 2) verreweg de snelsten en hebben de kleinste kans op het maken van fouten. Maar bijkomend nadeel is, dat ze niet altijd even makkelijk toepasbaar zijn. De ABC-formule heeft als groot voordeel dat, als er oplossingen zijn, deze altijd gevonden worden. Het grote nadeel is dat deze methode veel meer tijd kost (die je vaak niet hebt tijdens een proefwerk).
Daarom zullen wij ook altijd bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen eerst kijken of methode 1) kan, zo niet dan kijken we of methode 2) kan en als deze ook niet kan, dan pas passen we de ABC-formule toe.

3.3.1 Ontbinden in factoren

We kunnen voor deze methode een algoritme geven.

1. Herleid de vergelijking tot de vorm $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Deel alle termen van de vergelijking door a.
3. Probeer de vergelijking te herleiden tot de vorm $(x + p)(x + q) = 0$.
4. De oplossingen zijn dan $x = -p$ en $x = -q$.

Hierbij wil ik stap 3. verduidelijken. Zonder haakjes schrijf je $(x + p)(x + q)$ als $x^2 + (p + q)x + pq$.
Je hebt de vergelijking die je op moet lossen eerst herleid tot $ax^2 + bx + c = 0$ en daarna gedeeld door a (stap 1. en 2. uit het algoritme). Je houdt dus na stap 2. de vergelijking $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ over.
Het is nu dus de bedoeling dat je twee getallen p en q vindt, die met elkaar vermenigvuldigd het getal $\frac{c}{a}$ opleveren en bij elkaar opgeteld het getal $\frac{b}{a}$.
Zie het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 11 *We gaan de vergelijking $2x^2 - 16x = -24$ oplossen.*

1. $2x^2 - 16x = -24 \Rightarrow 2x^2 - 16x + 24 = 0$
2. $2x^2 - 16x + 24 = 0$ *gedeeld door a levert* $x^2 - 8x + 12 = 0$
3. *Je vindt nu dat* $-6 \times -2 = 12$ *en* $-6 - 2 = -8$ *dus dat je de vergelijking* $x^2 - 8x + 12 = 0$ *kunt herleiden tot* $(x - 2)(x - 6) = 0$
4. *De oplossingen zijn dan* $x = - - 2 = 2$ *en* $x = - - 6 = 6$.

□

3.3.2 Kwadraten splitsen

Ook voor deze methode kunnen we een algoritme geven. Het grote nadeel van deze methode is dat hij vaak niet makkelijk te gebruiken is. Het zeer grote voordeel is (zoals je zult zien) dat je de oplossingen erg snel vindt.

1. Probeer de vergelijking te herleiden tot de vorm $(x+p)^2 = q$.

2. Als $q \geq 0$ dan zijn de oplossingen

$$x + p = \sqrt{q} \text{ en } x + p = -\sqrt{q}$$

$$x = \sqrt{q} - p \text{ en } x = -\sqrt{q} - p$$

   Is $q \leq 0$ dan heeft de vergelijking geen oplossingen.

Bekijk het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 12 *We gaan de vergelijking* $(x-6)^2 - 25 = 0$ *oplossen.*

$$\begin{aligned} (x-6)^2 - 25 &= 0 \\ (x-6)^2 &= 25 \\ (x-6) = 5 \textit{ en } (x-6) &= -5 \\ x = 11 \textit{ en } x &= 1 \end{aligned}$$

□

Je ziet dat je jezelf een hoop werk bespaart doordat je de haakjes niet eerst weg hoeft te werken. Door veel oefening zul je getraind raken in het snel herkennen of deze methode makkelijk toepasbaar is of niet.

3.3.3 De ABC-formule

Als beide methodes die hierboven zijn uitgelegd niet of moeilijk toepasbaar zijn, dan biedt de ABC-formule uitkomst. Met de ABC-formule kun je elke kwadratische vergelijking oplossen. De ABC-formule is als volgt:
De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zijn:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dat wat onder het wortelteken staat, $b^2 - 4ac$ noemen we ook wel de *discriminant* van de vergelijking (afgekort D). Aangezien je de wortel uit een negatief getal niet kunt trekken, vind je alleen oplossingen voor $D \geq 0$. Ga voor jezelf even na hoe de grafiek er ten opzichte van de x-as uitziet als $D < 0$.

Voor de geïnteresseerden staat hieronder nog één van de vele bewijzen van de ABC-formule. Deze hoef je niet te kennen.
BEWIJS:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

vermenigvuldig beide kanten met $4a$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

vervolgens gaan we kwadraten afsplitsen:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

van beide kanten de wortel trekken:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b2 - 4ac}$$

uiteindelijk beide kanten door $x2a$ delen levert:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$$

□

Hieronder volgt nog een voorbeeld die gebruik maakt van de ABC-formule:

Voorbeeld 13 *We gaan de vergelijking $x^2 + 2x - 10 = 0$ met behulp van de ABC-formule oplossen. We zien dat $a = 1$, $b = 2$ en $c = -10$. Als we dit invullen krijgen we:*

$$x = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times -10}}{2 \times 1} \text{ of } x = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times -10}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{44}}{2} \approx -4,32 \text{ of } x = \frac{-2 - \sqrt{44}}{2} \approx 2,32$$

□

De discriminant heeft een aantal belangrijke eigenschappen. Aan de discriminant van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ kun je zien hoeveel oplossingen de vergelijking heeft. We hebben net al gezegd dat als $D < 0$ de vergelijking geen oplossingen heeft (omdat de wortel uit een negatief getal niet bestaat). Als $D = 0$ dan heeft de vergelijking precies één oplossing (ga zelf even na waarom). En als $D > 0$ dan heeft de vergelijking twee oplossingen.
De grafieken hieronder verduidelijken dit grafisch.

3.4 Opgaven

<u>A. Basiskennis</u>

1. Geef van de volgende formules aan welke kwadratisch zijn.

   a. $f(x) = x^2 + 1$
   b. $f(x) = 2x^2 - x$
   c. $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 1$
   d. $f(x) = x^2\sqrt{x} + 3$
   e. $f(x) = \pi x^2$
   f. $f(x) = 3x^2 + b\sqrt{2}x$
   g. $f(x) = -3x^2 - 18$
   h. $g(a) = \frac{1}{2}x^2 + \pi x$

2. Geef van de volgende tabellen aan of ze bij een kwadratische functie horen.

a.

x	0	1	2	3	4
y	6	6	10	18	30

b.

x	3	5	7	9	11
y	$9\frac{1}{2}$	$45\frac{1}{2}$	$101\frac{1}{2}$	$177\frac{1}{2}$	$273\frac{1}{2}$

c.

x	1	2	3	4	5
y	-7	-3	5	12	17

d.

x	0	1	2	5	6
y	-12	-11	-8	13	24

3. Geef van de volgende functies van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ wat a, b en c zijn.

a. $f(x) = 2x^2 + 3x - 8$	g. $f(x) = (x+1)^2 - 14$
b. $f(x) = -x^2 - x + 3$	h. $f(x) = x^2 - (\pi - r)x$
c. $f(x) = -ax^2 + x + 3 + p$	i. $f(x) = x^2$
d. $f(x) = (x+3)^2 - 8$	j. $f(x) = -x^2 + 12x - c$
e. $f(x) = 3(x^2 + x + 4)$	k. $f(x) = 3\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$
f. $f(x) = (x+1)(x+17)$	l. $f(x) = (2x+1)(2x-1)$

4. Bereken de coördinaten van de top van de volgende kwadratische vergelijkingen.

a. $f(x) = x^2$
b. $f(x) = 2x^2 + 3x - 8$
c. $f(x) = (2x+1)(3x+2)$
d. $f(x) = -x(2x+17)$

5. Teken de grafieken van de functies uit opgave 4.

6. Los de volgende vergelijkingen met 'ontbinden in factoren' op:

a. $-x^2 + x = 0$	e. $a^2 + 7a - 18 = 0$	i. $b^2 - 16b + 64 = 0$
b. $x^2 + 11x + 28 = 0$	f. $a^2 - 3a - 70 = 0$	j. $-b^2 - 4b = 0$
c. $2x^2 - 40x + 72 = 0$	g. $3a^2 - 3a - 18 = 0$	k. $b^2 - 64 = 0$
d. $x^2 + 5x - 14 = 0$	h. $a^2 + 2a = 0$	l. $\frac{1}{2}b^2 - 2b = 0$

7. Los de volgende vergelijkingen met 'kwadraten splitsen' op:

a. $(x+2)^2 = 9$	e. $(x+3)^2 + 45 = 13$
b. $(x - \frac{1}{2})^2 = 49$	f. $x^2 - 6x + 2 = 0$
c. $(x+2)^2 + 7 = 0$	g. $x^2 + 4x + 4 = 0$
d. $(2x-3)^2 - 3 = -2$	h. $x^2 + 6x + 9 = 2$

8. Los de volgende vergelijkingen op (kijk eerst of het anders kan en gebruik daarna pas de ABC-formule!):

a. $-x^2 + 6x - 3 = 0$	e. $a^2 + 6a + 5 = 0$	i. $b(b - 7) = 4$
b. $2x^2 + 3x - 2 = 0$	f. $2a^2 + 6a + 4 = 0$	j. $b^2 + 3b = 14$
c. $x^2 + 4x + 4 = 0$	g. $\frac{1}{2}a^2 + 2a + 1 = 0$	k. $b^2 + 6b = -9$
d. $6x^2 - 3x - 11\frac{1}{2} = 0$	h. $(2x - 3)^2 + 2 = 18$	l. $b^2 + 2 = -10b$

B. Toepassing

1. Er is een grafiek gegeven van een kwadratische functie h die twee snijpunten met de x-as heeft: $x = 1$ en $x = 4$. De grafiek gaat tevens door het punt $(-1, 4)$. Stel het functievoorschrift op.

2. De ribbe r van een kubusvormig bakje is tot op de rand gevuld met water. Bart haalt er $98cm^3$ water uit. Het blijkt nu dat het water tot op 2 cm van de rand staat.

   (a) Geef een formule voor de inhoud van het deel water dat Bart eruit heeft gehaald.

   (b) Geef een formule voor de inhoud van het water dat er nog inzit.

   (c) Bereken met de vergelijking van zowel (a) als (b) de lengte van de ribbe van de kubus.

   (d) Ga na dat het antwoord hetzelfde moet zijn.

3. Roel gooit op $t = 0$ een bal uit het raam van een flatgebouw. De hoogte van de bal boven de grond wordt beschreven door de formule $h(t) = -(t - 3)^2 + 43$, met h in meters en t in seconden.

   (a) Op welke hoogte gooit Lienet de bal uit het raam.

   (b) Teken dat gedeelte van de grafiek waar beide variabelen zinvol zijn.

   (c) Welke waarden kan h in deze situatie aannemen? En t?

   (d) Bereken het hoogste punt dat de bal bereikt. Na hoeveel seconden is dat?

4. Martin Drent van FC Groningen schiet de bal naar een medespeler. De hoogte van de bal kun je berekenen met de functie $h(a) = -\frac{a^2}{5} + 3a$. Hierin is a de horizontale afstand vanaf Martin Drent in meters en h de hoogte van de bal in meters.

   (a) Welke vergelijking moet je oplossen om te weten waar de bal weer op de grond komt?

(b) Los deze vergelijking op.

(c) Bereken hoe hoog de bal komt.

(d) Bereken op welke afstand van Martin Drent de bal een hoogte van 7 meter bereikt.

5. Het wereldrecord speerwerpen staat op naam van de Tsjech Jan Zelezny en dateert uit 1996. Hij gooide toen $98,48$ meter. Tijdens een training gooit Zelezny zijn speer volgens de functie $h(x) = -\frac{3}{850}x^2 + \frac{24}{85}x + 1\frac{1}{2}$, met h de hoogte van de speer in meters en x de afstand van de speer vanaf Zelezny (ook in meters).

   (a) Bereken $h(0)$.

   (b) Wat is de betekenis van dit antwoord?

   (c) Hoe ver gooit Zelezny zijn speer tijdens deze training?

   (d) Wat is de maximale hoogte die de speer bereikt?

   (e) Op hoeveel meter van Zelezny bereikt de speer die maximale hoogte?

   (f) Geef de coördinaten van de top met behulp van je antwoord van (d) en (e).

Hoofdstuk 4

Ongelijkheden

Bij het oplossen van ongelijkheden is het altijd de vraag: 'voor welke x is de grafiek van f groter (of kleiner) dan die van g', met andere woorden, los op: $f(x) > g(x)$ (of $f(x) < g(x)$) .
Het oplossen van ongelijkheden gaat altijd op dezelfde manier. Het maakt niet uit met welke vergelijkingen je te maken hebt. In dit hoofdstuk zullen we ons beperken tot lineaire en kwadratische vergelijkingen, maar de methodes die je hier leert zijn net zo goed toepasbaar op elke andere vergelijking.

4.1 Lineare ongelijkheden

Hoe los je een lineire ongelijkheid op? Hiervoor bestaat een vrij eenvoudig algoritme.

1. Los eerst de bijbehorende vergelijking op.
2. a) Teken de grafiek en kijk wanneer welke vergelijking groter(of kleiner) dan de andere, òf b) controleer door invullen aan welke kant van het gevonden getal de oplossing ligt.

Het controleren door invullen kan alleen als je te maken hebt met lineaire vergelijkingen. Bij kwadratische (en andere) vergelijkingen moet je de grafiek tekenen en daarin de oplossing aflezen.
Bekijk het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 14 *We gaan de volgende ongelijkheid oplossen:* $4x - 2 > 2x - 1$.
De vraag is nu dus: voor welke x *is* $4x - 2$ *groter dan* $2x - 1$*? Om daarachter te*

komen gaan we eerst kijken wanneer ze gelijk zijn:

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 2x - 1 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Je weet nu dat ze voor $x = \frac{1}{2}$ *gelijk zijn. Dat houdt dus in dat voor* $x < \frac{1}{2}$ *òf voor* $x > \frac{1}{2}$, $4x - 2$ *groter is dan* $2x - 1$.
Dit kun je nu op twee manieren controleren. Je vult een willekeurig getal in de vergelijking, bijvoorbeeld $x = 0$. *Je gaat na of de vergelijking klopt:*

$$4 \cdot 0 - 2 > 2 \cdot 0 - 1 \Rightarrow -2 > -1.$$

Deze klopt niet dus kun je concluderen dat het antwoord moet zijn $x > \frac{1}{2}$.
En andere manier is om de grafiek te tekenen (of te schetsen) en te kijken waar $4x - 2$ *groter is dan* $2x - 1$*:*

Je ziet dat voor $x > \frac{1}{2}$ *de grafiek van* $y = 4x - 2$ *groter is dan die van* $y = 2x - 1$ *(het dikgedrukte deel).* $\square$

4.2 Kwadratische ongelijkheden

Voor kwadratische ongelijkheden pas je hetzelfde algoritme toe (maar dan zonder 2b)).
Bekijk het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 15 *We gaan de volgende ongelijkheid oplossen:* $x^2 - 2x + 3 < 3$*.* *De vraag is nu dus: voor welke* x *is* $x^2 - 2x + 3$ *kleiner dan* 3*? Om daarachter te komen gaan we eerst weer kijken wanneer ze gelijk zijn:*

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 3 &= 3 \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \\ x = 0 \text{ en } x &= 2 \end{aligned}$$

Voor $x = 0$ *en* $x = 2$ *zijn de beide functies dus gelijk. Vervolgens teken je de beide grafieken in een assenstelsel:*

En je ziet dat tussen beide snijpunten de parabool kleiner is dan de lijn $y = 3$ *(het dikgedrukte deel). Dit noteren we als volgt:* $0 < x < 2$*.*

□

4.3 Kwadratisch-lineaire ongelijkheden

Als we een kwadratische functie gaan vergelijken met een lineaire functie, dan werkt dit op dezelfde manier als hierboven. Je berekent voor welke x ze gelijk zijn (door te herleiden op nul en dan de kwadratische vergelijking die je zo overhoudt op te lossen), je tekent (of schetst) de grafieken daarna en leest vervolgens de oplossing af.
Zoals aan het begin van het hoofdstuk is opgemerkt kun je je nu voorstellen dat deze methode voor elke functie werkt waarvan je de snijpunten van de vergelijking kunt vinden.

4.4 Opgaven

A. Basiskennis

1. Los de volgende lineaire ongelijkheden op:

a. $7x - 3 > 4x + 9$	e. $3(-6a + 4) > -5a + 2(a - 9)$
b. $15x - 19 < 9x + 11$	f. $4(a + 3) + 2a < 3a - 15$
c. $2x + 4 > 31 - x$	g. $2(a - 15) < a$
d. $5x - 6 > 3x + 4$	h. $25 - 3(a + 6) > 2(3a - 5\frac{1}{2})$

2. Los de volgende kwadratische ongelijkheden op:

a. $x^2 + 4x > 0$	e. $2a^2 - a > 6$
b. $-x^2 - 7x < 0$	f. $8a^2 + 14a - 4 < 0$
c. $3x^2 - 3x > 6$	g. $(a + 2)(3a - 10) > 0$
d. $6x + x^2 > -5$	h. $frac12a^2 + 2a < 4$

3. Los de volgende kwadratische-lineaire ongelijkheden op:

a. $x^2 + 2x + 9 > x + 9$	e. $a^2 + 9a - 17 < 2a + 1$
b. $x^2 - 6x + 12 > 2x - 4$	f. $14a + a^2 + 24 < 3a - 4$
c. $x^2 - 4x + 10 < 2x + 2$	g. $a^2 + 17a + 65 < a + 1$
d. $x^2 - 6x - 25 > -x - 1$	h. $a^2 + 19a + 36 > 7a$

B. Toepassing

1. Bij meneer Dominguez in de wijk zijn er twee bedrijven die televisies repareren. Snelgemaakt rekent 20 euro voorrijkosten en 15 euro per uur voor de

tijd die de reparatie vergt. Bij Repair gebruiken ze de formule $K = 25+12t$ om de prijs te bepalen.Hierin is t de tijd in uren en K de kosten in euro's.

(a) De TV van meneer Dominguez is stuk en hij verwacht dat de monteurs er zeker minder dan een uur mee bezig zullen zijn. Welke bedrijf kan meneer Dominguez het beste bellen?

(b) Vanaf hoveel *minuten* is Repair goedkoper dan Snelgemaakt?

2. We gaan even terug naar de baan van de speer van Zelezny uit opgave B4. van het vorige hoodstuk.

   (a) Voor welke x is de hoogte van de speer meer dan 6 meter?

   (b) Na hoeveel meter komt de speer weer onder de 3 meter?

Hoofdstuk 5

De discriminant $b^2 - 4ac$

Tot nu toe heb je alleen kwadratische vergelijkingen opgelost waarbij de kwadratische vergelijking gelijk werd gesteld aan aan constante. We gaan nu kijken naar gevallen waarbij een kwadratische functie gelijk wordt gesteld aan een lineaire functie. Je zult zien dat hierbij de discriminant een belangrijke rol kan spelen.

5.1 De grafiek

Zoals je weet is de grafiek van een kwadratische functie een parabool (met als $a < 0$ een bergparabool en als $a > 0$ een dalparabool) en de grafiek van een lineaire functie een mooie *kaars*rechte lijn.
Als we gaan kijken naar de grafiek van een kwadratische functie ($f(x)$) en een lineaire functie ($g(x)$) in één assenstelsel dan kunnen we drie gevallen onderscheiden:

- De parabool en de rechte lijn snijden elkaar.
- De parabool en de rechte lijn raken elkaar.
- De parabool en de rechte lijn snijden of raken elkaar niet.

Dit betekent dus dat in het eerste geval de vergelijking $f(x) = g(x)$ twee oplossingen heeft. In het tweede geval maar één oplossing en in het derde geval geen oplossingen.
Bekijk de tekening hieronder: de parabool heeft met lijn l twee oplossingen, met lijn m één en met lijn n geen.

Hoeveel oplossingen de vergelijking die we op willen lossen heeft, kunnen we aan de hand van de discriminant eenvoudig vinden. We hebben gezien als $D > 0$ dan waren er twee oplossingen, als $D = 0$ dan was er één oplossing en voor $D < 0$ bestonden er geen oplossingen. Als we nu de vergelijking $f(x) = g(x)$ herleiden op nul, kunnen we eenvoudig de discriminant hiervan vinden zoals uitgelegd in 3.3.3.

Voorbeeld 16 *We willen, zonder de grafiek te hoeven tekenen, weten hoeveel snijpunten de functie* $f(x) = x^2 + 3x + 2$ *heeft met de functie* $g(x) = x - 4$.

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + 3x + 2 = x - 4$$

herleiden naar nul levert:

$$x^2 + 2x + 6 = 0$$

Hieruit volgt dat $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -20$

De discriminant D *is kleiner dan nul, dus heeft de vergelijking* $f(x) = g(x)$ *geen oplossingen: de grafieken van* f *en* g *hebben geen punt gemeenschappelijk.* □

5.2 Snijpunten vinden

5.2.1 De onbekende parameter in de lijn

Soms wil je weten wanneer een lijn uit een familie van lijnen twee, één of geen snijpunten met een parabool heeft. Hiervoor kijk je eerst welke lijn de parabool raakt (dus de discriminant moet nul zijn). Uit de grafiek kun je het dan verder

aflezen.
We weten dat de familie van lijnen $l_p : y = x + p$ evenwijdig met elkaar zijn (waarom?). We zouden ons nu bijvoorbeeld af kunnen vragen voor welke p deze lijn de parabool $f(x) = x^2$ raakt. Of voor welke p de vergelijking $x + p = x^2$ geen oplossingen heeft. Om hier achter te komen moeten we steeds de vergelijking herleiden naar nul en dan de discriminant uitrekenen.

Voorbeeld 17 *We hebben de vergelijking $x + p = x^2$. Als we deze herleiden op nul hebben we $x^2 - x - p = 0$. Hierin is $a = 1$, $b = -1$ en $c = -p$. De discriminant is dus $D = 1 + 4p$. De volgende vraag is nu: Wanneer is $D = 0$? Dus wanneer is $1+4p = 0$? Als je deze vergelijking oplost komt je uit op $p = -\frac{1}{4}$. Dit houdt dus in dat de lijn $y = x - \frac{1}{4}$ de parabool $f(x) = x^2$ raakt.* □

Ga voor jezelf even na (met behulp van de grafiek) voor welke p de lijn twee snijpunten heeft met de parabool.
Je zou je ook af kunnen vragen wat de coördinaten zijn van het raakpunt waar we het hierboven over hebben. Bedenk dat je nu voor de parabool $f(x) = x^2$ en de lijn $y = x - \frac{1}{4}$ een raakpunt hebt. Deze kun je dus eenvoudig vinden door de vergelijking $x^2 = x - \frac{1}{4}$ op te lossen.
LET OP: in het voorbeeld hierboven (en in de sommen uit paragraaf 5.3) is p een gewoon getal en x de variable. Dus als je bijvoorbeeld de vergelijking $2x^2 - 8x + p - 4 = 0$ hebt, dan is $a = 2$, $b = -8$ en $c = p - 4$. Maak hier geen fouten mee door te zeggen dat $c = -4$ of iets dergelijks.

5.2.2 De onbekende parameter in de parabool

Zoals je hierboven wilde weten wanneer een lijn uit een familie van lijnen een parabool snijdt kun je ook gaan kijken wanneer een parabool uit een familie van parabolen een lijn snijdt of raakt.

Voorbeeld 18 *We hebben de familie van functies $f_p(x) = x^2 - px + 2$. We willen nu weten voor welke waarde van p de grafieken van f en $g(x) = 2x - 1$ elkaar raken. Daartoe gaan we de vergelijking $x^2 - px + 2 = 2x - 1$ op nul herleiden.*

$$x^2 - px + 2 = 2x - 1$$

$$x^2 + (-p - 2)x + 3 = 0$$

Hierin is $a = 1$, $b = -p - 2$ en $c = 3$ dus de discriminant is:

$$D = (-p - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = p^2 + 4p - 8$$

We willen weten wanneer f en g elkaar raken,
dus we moeten oplossen wanneer $D = 0$

$$D = p^2 + 4p - 8 = 0$$

$$p = \frac{-4 - \sqrt{48}}{2} \approx -5,46 \textit{ en } p = \frac{-4 + \sqrt{48}}{2} \approx 1,46$$

□

5.3 Opgaven

A. Basiskennis

1. Herleid de volgende vergelijkingen tot de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ (als dat nodig is) en geef aan wat a, b en c is.

   a. $2x^2 + 3x = p$
   b. $-x^2 - px + 3 = 0$
   c. $-(p+1)x^2 + x + 3 = -p$
   d. $(x+p)^2 = 8$
   e. $px^2 + px = -p$
   f. $px^2 + (p+1)x - p = -4$
   g. $(x+1)^2 = p$
   h. $x^2 - px = 0$
   i. $x^2 + p - 9 = 0$
   j. $-x^2 + (12+p)x = 7$
   k. $(x+p)(x+17) = 0$
   l. $(2x+1)(px-1) = 0$

2. Bereken de determinant van de vergelijkingen uit opgave 1.

B. Toepassing

Tip: Bij de volgende sommen is het vaak handig als je voor jezelf een schets maakt van hoe de grafiek eruitziet voor de verschillende p's.

1. De functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$ en de familie van functies $g_p(x) = x + p$ zijn gegeven.

   (a) Bereken voor welke waarde van p de grafiek van f de grafiek van g_p raakt.

   (b) Geef de coördinaten van dat raakpunt.

   (c) Voor welke waarden van p hebben f en g geen punten gemeenschappelijk?

2. Hieronder zijn de grafieken van $f(x) = x^2 + 7x + 10$ en van $g(x) = 10x + 7$ getekend. Het lijkt erop dat ze elkaar raken. Laat met een berekening zien of dat waar is.

3. Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = -2x^2 + 3x$ en $h_p(x) = x + p$.

   (a) Bereken voor welke waarde van p de grafiek van f de grafiek van h_p raakt.

   (b) Bereken voor welke waarde van p de grafiek van g de grafiek van h_p raakt.

   (c) Geef de coördinaten van deze raakpunten.

   (d) Voor welke p's heeft de grafiek van h_p zowel met f als met g geen snij- of raakpunten?

4. Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = x^2 + px - 6$.

   (a) Waarm gaan al deze parabolen door het punt $(0, -6)$.

   (b) Laat zien dat er geen p bestaat waarvoor de parabool $f_p(x)$ de x-as raakt.

   (c) Bereken voor welke twee waarden van p de parabool de lijn $y = -2x - 10$ raakt.

5. Gegeven is de familie van functies $f_p(x) = x^2 - x + p$ en de lijn $y = x + 3$.

(a) Bereken $f(3)$.

(b) Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = x + 3$ twee snijpunten met de parabool?

(c) Voor welke waarden van p heeft de parabool twee snijpunten met de x-as.

Bijlage

1. Niveautoets

Niveautoets.

1. Schrijf de volgende formules (indien mogelijk) zo kort mogelijk.
   a. $x^2 + x^2$ d. $a^2 + a^3$
   b. $x + x^2 + x$ e. $8\frac{5}{6}a^2 - 7a - 0,5a^2$
   c. $8x + 3x + x^2$ f. $\frac{3}{7}a^3 - \frac{5}{9}a + 3^3$

2. Werk de haakjes weg en schrijf zo kort mogelijk.
   a. $y = (2x + 1)(3x + 1)$ e. $p = (a - 3)(3a - 9)$
   b. $y = (3x + \frac{1}{2})(x + 1)$ e. $p = (15a - 4)(15a + 4)$
   c. $y = (x - \frac{1}{2})(-x - 3)$ f. $p = (a - 3)(7 - 6a)$

3. Ontbind in factoren.
   a. $y = 2x^2 - 4x$ d. $p = 5a - 35a^2$
   b. $y = 7x - 35x^2$ e. $p = 4a^2 - 2a$
   c. $y = 24x + 36$ f. $p = 1,1a^2 + 5,5a$

4. Los de volgende vergelijkingen op.
   a. $13 + 2x = 3(x - 1)$ d. $2(a + 3) + 14 = 12$
   b. $b - 2 = 2(b + 12)$ e. $8 + \frac{4}{7}b = 7$
   c. $\frac{1}{5}b = \frac{2}{5}b$ f. $b + 13(b + 1) = 13$

5. Bereken de coördinaten van de top van de volgende kwadratische vergelijkingen.
   a. $f(x) = x^2$
   b. $f(x) = 6x^2 + 9x - 24$
   c. $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$

6. Los de volgende vergelijkingen op (kijk eerst of het anders kan en gebruik daarna pas de ABC-formule!):
   a. $x^2 - 2x - 3 = 0$ d. $a^2 + 8a + 7 = 0$
   b. $x^2 + 4x + 4 = 0$ e. $a^2 + 7a - 18 = 0$
   c. $-x^2 + x = 0$ f. $(2x - 3)^2 + 2 = 18$

7. Los de volgende ongelijkheden op:
   a. $7x - 3 > 4x + 9$ c. $-6a + 4 > a - 9$
   b. $15x - 19 < 11$ d. $4(a + 3) + 2a < 3a - 15$

8. Teken de grafiek van $f(x) = 2x + 3$ en van $g(x) = x^2 + 2x - 1$ in één assenstelsel.